

УДК 620.3:536.2.022

doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-7

Соотношение электронной и фононной теплопроводностей в наномасштабных проводниках

Р. А. Браже

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

brazhe@ulstu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Наномасштабные проводники на основе графеновых нанолент и углеродных нанотрубок представляются перспективными элементами устройств наноэлектроники. Практический интерес представляют не только их высокая электропроводность, но и высокая теплопроводность. Причем, в отличие от электропроводности, теплопроводность указанных нанопроводников обусловлена не только электронным, но также и фононным транспортом. Особый интерес представляет изучение электронной и фононной теплопроводностей этих нанопроводников в режиме баллистического транспорта переносчиков тепла, когда рассеяние электронов на фононах отсутствует. Длина баллистического пробега электронов и фононов в графене составляет около 1 мкм. Поэтому такой режим привлекателен для практического использования, так как в нем отсутствуют потери на выделение Джоулева тепла. Соответствующие поперечные размеры нанопроводников не превышают 100 нм, поэтому при расчетах электро- и теплопереноса в них необходимо учитывать квантово-размерные эффекты. В связи с этим исследование соотношения электронной и фононной баллистических теплопроводностей и числа соответствующих квантовых каналов электронного и фононного транспорта в нанопроводниках является актуальной задачей. Целью данной работы является решение этой задачи. *Материалы и методы.* Рассматриваются графеновые наноленты с краями типа «зигзаг» и углеродные нанотрубки типа «кресло». Длина этих нанопроводников считается меньше их баллистической длины, а поперечные размеры – не превышающими 100 нм. Исследование базируется на известных методах квантовой физики, физики твердого тела и квантовой теории электропроводности и теплопроводности двумерных кристаллических тел. *Результаты.* Путем применения принципов размерного квантования к теории теплопроводности электронного и фононного газов в графеновых нанолентах и углеродных нанотрубках получены выражения для квантов электронной и фононной теплопроводностей в этих материалах, а также числа каналов электронного и фононного транспорта. Сделаны соответствующие численные оценки. *Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы для расчетов теплопереноса в нанопроводниках на основе графеновых нанолент и углеродных нанотрубок.

Ключевые слова: графен, наноленты, углеродные нанотрубки, теплопроводность, квантово-размерные эффекты, баллистический режим, кванты теплопроводности

Для цитирования: Браже Р. А. Соотношение электронной и фононной теплопроводностей в наномасштабных проводниках // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 68–76. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-7

The ratio of electron and phonon thermal conductivity in nanoscale conductors

© Браже Р. А., 2023. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

R.A. Brazhe

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

brazhe@ulstu.ru

Abstract. *Background.* Nanoscale conductors based on graphene nanoribbons and carbon nanotubes appear to be promising elements of nanoelectronics devices. Of practical interest are not only their high electrical conductivity, but also high thermal conductivity. Moreover, unlike electrical conductivity, the thermal conductivity of these nanoconductors is due not only to electronic, but also to phonon transport. Of particular interest is the study of the electron and phonon thermal conductivity of these nanoconductors in the mode of ballistic transport of heat carriers, when there is no electron scattering on phonons. The length of the ballistic path of electrons and phonons in graphene is about 1 micron. Therefore, this mode is attractive for practical use, since there are no losses on the release of Joule heat. The corresponding transverse dimensions of nanowires do not exceed 100 nm, therefore, quantum-dimensional effects must be taken into account when calculating electrical and heat transfer in them. In this regard, the study of the ratio of electron and phonon ballistic thermal conductivity and the number of corresponding quantum channels of electron and phonon transport in nanoconductors is an urgent task. The purpose of this work is to solve it. *Materials and methods.* Graphene nanoribbons with “zigzag” type edges and carbon nanotubes of “armchair” type are considered in this paper. The length of these nanoconductors is considered to be less than their ballistic length, and the transverse dimensions do not exceed 100 nm. The research is based on well-known methods of quantum physics, solid state physics and quantum theory of electrical conductivity and thermal conductivity of two-dimensional crystalline media. *Results.* By applying the principles of dimensional quantization to the theory of thermal conductivity of electron and phonon gases in graphene nanoribbons and carbon nanotubes, expressions are obtained for the quanta of electron and phonon thermal conductivity in these materials, as well as the number of channels of electron and phonon transport. Corresponding numerical estimates are made. *Conclusions.* The results obtained can be used to calculate heat transfer in nanoconductors based on graphene nanoribbons and carbon nanotubes.

Keywords: graphene, nanoribbons, carbon nanotubes, thermal conductivity, quantum-dimensional effects, ballistic mode, quanta of thermal conductivity

For citation: Brazhe R.A. The ratio of electron and phonon thermal conductivity in nanoscale conductors. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(2):68–76. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-7

Введение

Наномасштабные проводники на основе графеновых нанолент (ГНЛ) и углеродных нанотрубок (УНТ) получают все возрастающее применение в наноэлектронике и смежных областях nanoиндустрии прежде всего из-за их высокой электропроводности. Кроме того, у этих материалов достаточно большая длина свободного пробега носителей заряда (~ 1 мкм), что позволяет в ряде случаев использовать их в баллистическом режиме электропроводности. Имея высокую электропроводность, такие нанопроводники имеют и большую теплопроводность [1], что необходимо учитывать, если они используются в условиях наличия градиентов температуры. Необходимо также иметь в виду, что теплопроводность проводников складывается из двух составляющих: электронной и фононной, имеющих разные температурные зависимости. Плюс ко всему, в узких ГНЛ и тонких УНТ (менее 100 нм в попереч-

ном измерении) начинают проявлять себя квантовые свойства электронов и фононов, что приводит к появлению квантов теплопроводности.

Работы по квантовой теории теплопроводности нанопроводников в основном базируются на модели Р. Ландауэра однонаправленного транспорта электронов в двумерном электронном газе [2] и приводят к понятию *кванта фононной теплопроводности* [3–6]. Понятие *кванта электронной теплопроводности*, по-видимому, впервые введено автором в работах [7, 8].

Цель данной работы – исследование вкладов квантов электронной и фононной теплопроводностей с учетом соответствующих каналов электронного и фононного транспорта в общую теплопроводность графеновых нанолент и углеродных нанотрубок.

Материалы и методы

Объектами исследования являлись ГНЛ с краями типа «зигзаг» и УНТ типа «кресло», заведомо обладающие металлическими свойствами [9–11], если только ширина наноленты не меньше некоторого критического значения, при котором она становится квантово-размерным изолятором [12]. Длина исследуемых нанопроводников считается не превышающей длины баллистического транспорта электронов: $L \leq L_b$ (для ГНТ и УНТ $L_b \sim 1$ мкм).

В работе использовались известные представления квантовой механики о волнах де Бройля, методы зонной теории твердого тела, а также основные положения квантовой теории электропроводности и теплопроводности твердых кристаллических, в том числе двумерных тел.

Результаты

Квантование электронной теплопроводности

Классическая теория теплопроводности газов приводит к следующему выражению для коэффициента теплопроводности [13]:

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho_2 c_V, \quad (1)$$

где κ_2 – коэффициент двумерной теплопроводности; $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул; $\langle \lambda \rangle$ – длина их свободного пробега; ρ_2 – двумерная плотность газа; c_V – его удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Коэффициент $1/2$ в выражении (1) означает, что в однонаправленном транспорте каждая частица может двигаться вдоль одной из двух независимых координат двумерной среды.

Рассматривая электроны как двумерный одноатомный газ, находящийся в зоне проводимости металлической ГНЛ, мы можем преобразовать (1) следующим образом:

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} v_F L n_2 m^* \frac{i}{2} \frac{k_B}{m^*} = \frac{1}{2} \frac{v_F}{W} k_B N, \quad (2)$$

где v_F – скорость Ферми электрона; L – длина нанопроводника; W – его ширина; $n_2 = N / (WL)$ – двумерная концентрация свободных электронов (N – их общее число в ГНЛ); m^* – эффективная масса электрона; i – число степеней

свободы переносимых частиц (для электрона в 2D-кристаллах $i = 2$); k_B – постоянная Больцмана. При этом в формуле (2) использовалась классическая теория теплоемкости идеального газа, не учитывающая ее зависимость от температуры. Сделанное допущение для электронного газа в металлах оправдано, так как согласно распределению Ферми – Дирака в его транспорте участвует лишь небольшая часть электронов с энергией, близкой к энергии Ферми, а сами электроны являются хорошей моделью молекул одноатомного идеального газа.

Теперь учтем требование пространственного квантования для электронных волн де Бройля в ГНЛ и УНТ. Для ГНЛ оно заключается в том, что на ширине наноленты W должна, как минимум, укладываться одна такая полуволна: $W = \lambda_B / 2 = \pi / k_F$, λ_B – длина волны де Бройля для электрона, а k_F – волновое число Ферми. Тогда в расчете на один электрон ($N = 1$), занимающий один квантовый канал электронного транспорта, коэффициент теплопроводности будет равен

$$\sigma_{20} = \frac{1}{2} \frac{v_F k_F}{\pi} k_B = \frac{1}{2} \frac{E_F k_F}{\pi p_F} k_B = \frac{1}{2} \frac{E_F}{\pi \hbar} k_B = \frac{E_F k_B}{h},$$

где E_F и p_F – соответственно энергия и импульс Ферми электрона в приближении линейной дисперсии энергии в графене; $\hbar$ – приведенная постоянная Планка.

Поскольку энергия Ферми определяет среднюю энергию одного свободного электрона в металле, то $E_F = (i/2) k_B T = k_B T$, следовательно выражение для кванта электронной теплопроводности принимает вид

$$\kappa_{20} = \frac{k_B^2 T}{h}, \quad (3)$$

где T – средняя температура ГНЛ.

Чтобы получить коэффициент баллистической электронной теплопроводности для наноленты в целом, нужно (3) умножить на число квантовых каналов электронного транспорта $M(E_F)$ в этой наноленте:

$$\kappa_2 = M(E_F) \kappa_{20}; \quad (4)$$

для ГНЛ:

$$M(E_F) = g_v g_s W \frac{k_F}{\pi}, \quad (5)$$

где g_s и g_v – соответственно спиновое и долинное вырождения энергетических состояний электронов (в графене $g_s = g_v = 2$).

Легко показать, что для УНТ выражения (3), (4) остаются без изменения, а для числа квантовых каналов электронного транспорта получается следующее выражение:

$$M(E_F) = g_s g_v \pi d \frac{k_F}{2}, \quad (6)$$

где d – диаметр УНТ.

Квантование фононной теплопроводности

В этом случае выражение (1) можно записать в виде

$$\kappa_2^{(ph)} = \frac{1}{2} v_{ph} L n_{a2} c_V^{(ph)}, \quad (7)$$

где v_{ph} – скорость распространения фононов; L – по-прежнему длина нанопроводника, не превышающая баллистическую длину фононного транспорта (которую полагаем равной длине баллистического пробега электронов, так как именно рассеяние электронов на фононах определяет величину этого параметра); n_{a2} – двумерная концентрация атомов в ГНЛ, а $c_V = C/\mu$ – удельная теплоемкость ГНЛ, выраженная через ее молярную теплоемкость C и молярную массу μ атомов, образующих 2D-кристалл. Для одномерного (одноканального) фононного транспорта при температурах T ниже температуры Дебая Θ_D задача о нахождении молярной теплоемкости решена И. Е. Иродовым [14], и результат получен в виде

$$C = \frac{\pi^2}{3} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right).$$

С учетом этого выражения формулу (7) легко привести к виду

$$\kappa_2^{(ph)} = \frac{\pi^2}{6} \frac{v_{ph}}{W} k_B \left(\frac{T}{\Theta_D} \right) N_a.$$

В расчете на один атом ($N_a = 1$) из последнего выражения получаем

$$\kappa_{20}^{(ph)} = \frac{\pi^2}{6} \frac{v_{ph}}{W} k_B \left(\frac{T}{\Theta_D} \right). \quad (8)$$

Теперь учтем условие пространственного квантования фононных мод: $W = \pi/k_m$, $v_{ph} k_m = \omega_m$, где k_m и ω_m – соответственно максимальные значения волнового числа и частоты фононов. Учтем также, что $\Theta_D = \hbar \omega_m / k_B$. Тогда из (8) для кванта фононной теплопроводности получаем следующее выражение:

$$\kappa_{20}^{(ph)} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2 T}{h}. \quad (9)$$

Формула (9) полностью совпадает с выражениями для кванта фононной теплопроводности, полученными из теории Ландауэра [3, 5], однако приведенный здесь ее вывод представляется намного более простым и понятным.

Как и в случае электронной теплопроводности, для получения полного коэффициента баллистической двумерной теплопроводности в ГНЛ и УНТ нужно (9) умножить на число квантовых фононных каналов в соответствующих нанопроводниках M_{ph} :

$$\kappa_2^{(ph)} = M_{ph} \kappa_{20}^{(ph)}, \quad (10)$$

где для ГНЛ:

$$M_{ph} = W \frac{k_m}{\pi}, \quad (11)$$

а для УНТ:

$$M_{ph} = \pi d \frac{k_m}{2}. \quad (12)$$

Численные оценки. Входящее в (5), (6) волновое число Ферми может быть выражено через двумерную концентрацию электронов n_2 :

$$k_F = \sqrt{\frac{4\pi n_2}{g_s g_v}}, \quad (13)$$

где в случае термической генерации свободных носителей заряда (электронов и дырок) [15] получаем

$$n_2 = g_s g_v \frac{\pi}{24} \left(\frac{k_B T}{\hbar v_F} \right)^2. \quad (14)$$

Расчеты по формулам (13), (14), проведенные для ГНЛ и УНТ ($v_F \approx 0,8 \cdot 10^5$ м/с) при $T = 300$ К, дают значение $k_F \approx 2,02 \cdot 10^8$ м⁻¹. Соответственно число квантовых каналов электронного транспорта, приходящихся на единицу ширины ГНЛ $m(E_F) = M(E_F) / W$, согласно (5) получается равным $m(E_F) \approx 2,80 \cdot 10^8$ м⁻¹, а на единицу длины окружности УНТ согласно (6): $m(E_F) = M(E_F) / (\pi d) \approx 4,40 \cdot 10^8$ м⁻¹.

Входящее в (10), (11) максимальное волновое число фононов выражается через двумерную концентрацию атомов n_{a2} следующим образом:

$$k_m = \sqrt{4\pi n_{a2}}, \quad (15)$$

где n_{a2} может быть найдено как отношение числа атомов углерода в элементарной ячейке (два) к ее площади $S = (3\sqrt{2}/2)l_{C-C}^2$, где, в свою очередь, $l_{C-C} = 0,142$ нм – длина межатомной связи в графене.

Расчет по формуле (15) дает значение $k_m = 2,72 \cdot 10^{10}$ м⁻¹. Число квантовых каналов фононного транспорта на единицу ширины ГНЛ согласно (11) равно $m_{ph} = M_{ph} / W \approx 8,66 \cdot 10^9$ м⁻¹, а на единицу длины окружности УНТ: $m_{ph} = M_{ph} / (\pi d) \approx 13,6 \cdot 10^9$ м⁻¹. Таким образом, удельное число фононных квантовых каналов транспорта в ГНЛ и УНТ более чем на порядок превышает таковое для электронных квантовых каналов.

Из формул (3)–(6) и (9)–(12) следует, что отношение коэффициентов фононной и электронной баллистических теплопроводностей в рассматриваемых наномасштабных проводниках имеет вид

$$\frac{\kappa_2^{(ph)}}{\kappa_2} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_m}{k_F}. \quad (16)$$

Подставляя в (16) найденные выше численные значения k_m и k_F , рассчитанные для температур, близких к комнатной, получаем отношение $\kappa_2^{(ph)} / \kappa_2 \approx 4,43 \cdot 10^2$. Таким образом, в режиме баллистического транспорта при комнатной температуре фононная теплопроводность превышает электронную более чем на два порядка.

Обсуждение

Из полученных результатов следует, что по мере уменьшения ширины ГНЛ и диаметра УНТ уменьшается как число электронных, так и число фононных квантовых каналов транспорта соответствующих частиц и, следовательно, уменьшается и баллистическая теплопроводность указанных нанопроводников. Как было показано в работе [12], при критических значениях ширины наноленты $W_c = \pi/k_F$ диаметра нанотрубки $d_c = 2/(\pi k_F)$ ГНЛ с краями типа «зигзаг» и УНТ типа «кресло» становятся полупроводниками по отношению к электропроводности. В этих условиях на ширине наноленты не укладывается даже одна дебройлевская полуволна для электрона, на длине окружности нанотрубки не укладывается его дебройлевская длина волны.

Очевидно, что для электронного газа и электропроводность, и теплопроводность осуществляются через одни и те же квантовые каналы электронного транспорта. Поэтому в отношении электронной теплопроводности можно говорить о превращении металлических ГНЛ и УНТ при уменьшении их поперечных размеров до критических значений в тепловые полупроводники.

Более того, как было показано в [12], при ширине исследуемой ГНЛ менее 0,5 нм ширина образующейся в зоне проводимости энергетической щели для электронов, а в валентной зоне для дырок, составит более 5 эВ, и она становится диэлектриком. Электронная теплопроводность в такой ГНЛ обращается в нуль.

Что касается фононной теплопроводности, то критические поперечные размеры рассматриваемых ГНЛ и УНТ, при которых они должны становиться тепловыми налогами полупроводников $W_c^{(ph)} = \pi/k_m \approx 1,15 \text{ \AA}$ и $d_c^{(ph)} = 2/(\pi k_m) \approx 0,23 \text{ \AA}$. Это меньше длины межатомной связи. Следовательно, тепловых полупроводников существовать не может. По крайней мере, фононная теплопроводность присутствует всегда, и обусловлено это тем, что в реальных ГНЛ и УНТ число квантовых каналов фононного транспорта никогда не может быть менее одного.

Заключение

Полученные в работе аналитические выражения для квантов электронной и фононной теплопроводностей графеновых нанолент с краями типа «зигзаг» и углеродных нанотрубок типа «кресло», обладающих металлическими свойствами, а также формулы для расчета числа соответствующих квантовых каналов электронного и фононного баллистического транспорта позволяют решать задачи, связанные с теплопроводностью указанных нанопроводников.

Результаты работы могут быть полезны для научных работников и специалистов, связанных с физикой низкоразмерных сред и нанoeлектроникой.

Список литературы

1. Ghosh S., Calizo I., Teweldebrhan D., Pokatilov E. P., Nika D. I., Balandin A. A., Bao W., Miao F., Lau C. N. Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits // *Applied Physics Letters*. 2008. Vol. 92. P. 151911. doi: 10.1021/nl0731872
2. Landauer R. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices // *Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics*. 1970. Vol. 21, № 172. P. 863–867. doi: 10.1080/1478643700828472
3. Rego L. C., Kirichenko C. Quantized thermal conductance of dielectric quantum wires // *Physical Review Letters*. 1984. Vol. 91. P. 232–235. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.232
4. Schwab K., Henriksen E. A., Worlock J. M., Roukes M. L. Measurement of the quantum of thermal conductance // *Nature*. 2000. Vol. 404. P. 974–977. doi: 10.1038/35010065
5. Yamamoto T., Watanabe S., Watanabe K. Universal features of quantized thermal conductance of carbon nanotubes // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 92. P. 075502. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.075502
6. Браже Р. А., Нефедов В. С. Теплопроводность планарных и нанотубулярных супракристаллических структур при температурах ниже температуры Дебая // *Физика твердого тела*. 2014. Т. 56, № 3. С. 602–606.
7. Браже Р. А., Фуфаев И. В. Размерное квантование кинетических коэффициентов, описывающих явления переноса в графеноподобных нанолентах // *Физическое образование в вузах*. 2021. Т. 27, № 2. С. 90–97.
8. Браже Р. А., Лебедев Е. Ю., Фуфаев И. В. Недиссипативные необратимые процессы в наномасштабных линиях передачи // *Необратимые процессы в природе и технике : материалы Всерос. конф. НППТ-2023 (Москва, 31 января – 3 февраля 2023 г.)*. М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2023.
9. Brey L., Fertig H. A. Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation // *Physical Review B*. 2006. Vol. 73. P. 235411. doi: 10.103/PhysRevB.73.235411
10. Чернозатонский Л. А., Сорокин П. Б. Углеродные нанотрубки: от фундаментальных исследований к нанотехнологиям. М. : Наука, 2007. С. 154–174.
11. Мосин М. А. Расчет зонной структуры углеродных нанолент // *Политехнический молодежный журнал*. 2017. № 8. С. 1–6. doi: 10.18698/2541-8009-8-139
12. Браже Р. А. Квантово-размерные изоляторы // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2023. № 1. С. 115–127. doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-10
13. Браже Р. А. Лекции по физике. СПб. : Лань, 2013. 320 с.
14. Иродов И. Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике. М. : Энергоатомиздат, 1984. С. 165.
15. Fang T., Konar A., Xing H., Jena D. Carrier statistics and quantum capacitance of graphene sheets and ribbons // *Applied Physics Letters*. 2007. Vol. 91, № 9. P. 092109. doi: 10.1063/1.2776887

References

1. Ghosh S., Calizo I., Teweldebrhan D., Pokatilov E.P., Nika D.I., Balandin A.A., Bao W., Miao F., Lau C.N. Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits. *Applied Physics Letters*. 2008;92:151911. doi: 10.1021/nl0731872
2. Landauer R. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics*. 1970;21(172):863–867. doi: 10.1080/1478643700828472

3. Rego L.C., Kirczenow C. Quantized thermal conductance of dielectric quantum wires. *Physical Review Letters*. 1984;91:232–235. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.232
4. Schwab K., Henriksen E.A., Worlock J.M., Roukes M.L. Measurement of the quantum of thermal conductance. *Nature*. 2000;404:974–977. doi: 10.1038/35010065
5. Yamamoto T., Watanabe S., Watanabe K. Universal features of quantized thermal conductance of carbon nanotubes. *Physical Review Letters*. 2000;92:075502. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.075502
6. Brazhe R.A., Nefedov V.S. Thermal conductivity of planar and nanotubular supracrystalline structures at temperatures below the Debye temperature. *Fizika tverdogo tela = Solid state physics*. 2014;56(3):602–606. (In Russ.)
7. Brazhe R.A., Fufaev I.V. A size quantization of kinetic coefficients describing transport phenomena in graphene-like nanoribbons. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh = Physics at universities*. 2021;27(2):90–97. (In Russ.)
8. Brazhe R.A., Lebedev E.Yu., Fufaev I.V. Nondissipative irreversible processes in nanoscale transmission lines. *Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike: materialy Vse-ros. konf. NPPT-2023 (Moskva, 31 yanvarya – 3 fevralya 2023 g.) = Irreversible processes in nature and technology: proceedings of the IPNT – 2023 All-Russian conference (Moscow, January 31 – February 3, 2023)*. Moscow: MGTU im. N.E. Bauman, 2023. (In Russ.)
9. Brey L., Fertig H.A. Electronics states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation. *Physical Review B*. 2006;73:235411. doi: 10.103/PhysRevB.73.235411
10. Chernozatonskiy L.A., Sorokin P.B. *Uglerodnye nanotrubki: ot fundamental'nykh issledovaniy k nanotekhnologiyam = Carbon nanotubes: from basic research to nanotechnology*. Moscow: Nauka, 2007:154–174. (In Russ.)
11. Mosin M.A. Calculation of the band structure of carbon nanoribbons. *Politekhnikeskii molodezhnyy zhurnal = Polytechnic youth magazine*. 2017;(8):1–6. (In Russ.). doi: 10.18698/2541-8009-8-139
12. Brazhe R.A. Quantum-dimensional insulators. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(1):115–127. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-10
13. Brazhe R.A. *Lektsii po fizike = Physics lectures*. Saint Petersburg: Lan', 2013:320. (In Russ.)
14. Irodov I.E. *Sbornik zadach po atomnoy i yadernoy fizike = Collection of problems in atomic and nuclear physics*. Moscow: Energoatomizdat, 1984:165. (In Russ.)
15. Fang T., Konar A., Xing H., Jena D. Carrier statistics and quantum capacitance of graphene sheets and ribbons. *Applied Physics Letters*. 2007;91(9):092109. doi: 10.1063/1.2776887

Информация об авторах / Information about the authors

Рудольф Александрович Браже

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, Ульяновский государственный
технический университет (Россия,
г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

E-mail: brazhe@ulstu.ru

Rudolf A. Brazhe

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the sub-
department of physics, Ulyanovsk State
Technical University (32 Severniy Venets,
Ulyanovsk, Russia);

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 26.02.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 29.03.2023

Принята к публикации / Accepted 17.04.2023